

Malliavin-Stein-Methode für Poissonfunktionale

Prof. Dr. Christoph Thäle

2013

Inhaltsverzeichnis

1	Poissonprozesse	3
2	Stochastische Integrale	7
3	Chaosdarstellung	9
4	Malliavin-Operatoren	12
4.1	Pfadweise Interpretationen	12
5	Steinsche Methode	14
6	Malliavin-Stein-Schranke	15
7	Geometrische Zufallsgraphen	18
8	Das Boolesche Modell	21
9	Voronoi Approximation	23

1 Poissonprozesse

Grundraum (Z, \mathcal{Z}) versehen mit einem Maß μ .

Annahmen

- Z Polnisch (vollständig, metrisierbar und separabel)
- μ nichtatomar
- alle Mengen aus \mathcal{Z} seien μ -messbar
- $N(Z)$ bezeichne den Raum der lokalendlichen Zählmaße (Werte in \mathbb{N}) auf Z
- $\mathcal{N}(Z)$ sei die σ -Algebra, die erzeugt wird durch die Abbildungen

$$X \mapsto X(A), \quad X \in N(Z), \quad A \in \mathcal{Z}.$$

Definition Ein *Poissonsches Zufallsmaß* ist eine Abbildung

$$\eta : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \longrightarrow (N(Z), \mathcal{N}(Z))$$

mit

- a) $\eta(A) \sim \text{Poisson}(\mu(A))$, wobei $\frac{\lambda^\infty}{\infty!} e^{-\lambda}$ als ∞ interpretiert wird.
- b) Sind $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{Z}$ disjunkt, so sind $\mu(A_1), \dots, \mu(A_n)$ unabhängig.

Konvention Identifiziere η mit dem Träger $\text{supp}(\eta)$ (das ist eine lokalendliche zufällige abgeschlossene Menge).

$$\eta = \sum_{i=1}^{\mu(Z)} \delta_{z_i} \Rightarrow \mu(A) = \#\{z_i : z_i \in A\} \quad \forall A \in \mathcal{Z}$$

oder

$$\eta = \{z_1, z_2, \dots, z_{\eta(Z)}\} \Rightarrow \eta \cap A = \{z_i : z_i \in A\} \quad \forall A \in \mathcal{Z}$$

Fakt

- a) $\eta(Z) < \infty$ fast sicher $\Leftrightarrow \mu(Z) < \infty$.
- b) $\mathbf{P}(\exists i \text{ mit } \eta\{z_i\} > 1) = 0$ (nichtatomar).

Konstruktion Es sei A_1, A_2, \dots eine Zerlegung von Z in Mengen mit endlichem Maß, N_1, N_2, \dots eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $N_i \sim \text{Poisson}(\mu(A_i))$. Es seien

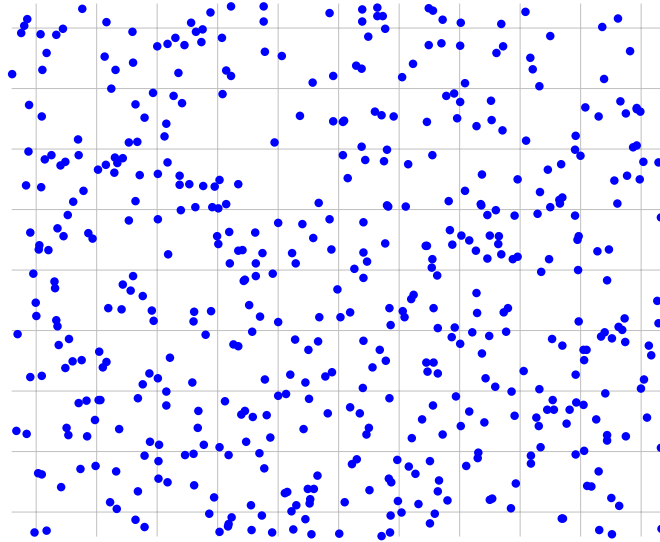


Abbildung 1: Zweidimensionaler Poissonscher Punktprozess (PPP)

weiter $(X_{i,j} : i = 1, 2, \dots; j = 1, \dots, N_i)$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in Z und Verteilung $\frac{\mu|_{A_i}}{\mu(A_i)}$.
Dann ist

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{N_i} \delta_{X_{i,j}}$$

Poissonsches Zufallsmaß.

Parameter Maß μ (Intensitätsmaß), denn

$$\mathbb{E} [\eta(A)] = \mu(A)$$

großer Wert \rightarrow viele Punkte
kleiner Wert \rightarrow wenige Punkte

Satz (Campbell) *Es sei $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-negativ und messbar. Dann gilt*

$$\mathbb{E} \left[\int_Z f(z) \eta(dz) \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{z \in \eta} f(z) \right] = \int_Z f(z) \mu(dz).$$

Beweis: Es sei $f = \mathbf{1}_A$, dann gilt

$$\mathbb{E} \left[\int_Z f(z) \eta(dz) \right] = \mathbb{E} [\eta(A)] = \mu(A) = \int_Z f(z) \mu(dz).$$

Rest: Standardargument!

□

Satz (Heraklion)

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(z_1, \dots, z_k) \in \eta^k} f(z_1, \dots, z_k) \right] = \int_Z \cdots \int_Z f(z_1, \dots, z_k) \mu(dz_1) \cdots \mu(dz_k).$$

Fakt (Mecke) *Es sei η ein Poissonscher Punktprozess (PPP) mit Intensitätsmaß μ und $f : N \times Z \rightarrow \mathbb{R}_+$ messbar, dann gilt*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{z \in \eta} f(z, \eta) \right] = \int_Z \mathbb{E} [f(x, \eta + \delta_x)] \mu(dx).$$

Beweis: Es sei $f = \mathbf{1}_{N_{0,C} \times B}$ mit $B, C \in \mathcal{Z}$ und $\mu(B), \mu(C) < \infty$. Dabei bezeichnet $N_{0,C}$ einen Punktprozess ohne Punkte in C . Dann erhalten wir für die linke Seite

$$\text{LHS} = \mathbb{E} \left[\int_Z f(z, \eta) \eta(dz) \right] = \mathbb{E} [\mathbf{1}(\eta(C) = 0) \cdot \eta(B)]$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \mathbb{E} \left[\int_Z f(x, \eta + \delta_x) \mu(dx) \right] = \mathbb{E} \left[\int_B \mathbf{1}((\eta + \delta_x)(C) = 0) \mu(dx) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{B \cap C} \mathbf{1}((\eta + \delta_x)(C) = 0) \mu(dx) \right] + \mathbb{E} \left[\int_{B \setminus C} \underbrace{\mathbf{1}((\eta + \delta_x)(C) = 0)}_{\Leftrightarrow \eta(C) = 0} \mu(dx) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{B \setminus C} \mathbf{1}(\eta(C) = 0) \mu(dx) \right] = \mathbb{E} [\mathbf{1}(\eta(C) = 0)] \underbrace{\mu(B \setminus C)}_{= \mathbb{E}[\eta(B \setminus C)]} \\ &= \mathbb{E} [\mathbf{1}(\eta(C) = 0) \underbrace{\eta(B \setminus C)}_{= \eta(B)}] = \text{LHS}. \end{aligned}$$

Das genügt, da diese Funktionen f die σ -Algebra $\mathcal{N}(Z)$ bereits erzeugen (dank unserer Annahmen an μ, Z , etc.)

□

Fakt *Es sei $f : Z \rightarrow [0, 1]$ messbar, dann*

$$\mathbb{E} \left[\prod_{z \in \eta} f(z) \right] = \exp \left(\int_Z (f - 1) d\mu \right) = \exp \left(- \int_Z (1 - f) d\mu \right)$$

Beweis: Es sei $A \subset Z$ kompakt mit $\mu(A) > 0$, $f \equiv 1$ in A^c und $\mu(A) < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \eta} f(z) \right] &= \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \eta \cap A} f(z) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\eta(A) = k) \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \eta \cap A} f(z) \mid \eta(A) = k \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(A)^k}{k!} e^{-\mu(A)} \frac{(\int_A f d\mu)^k}{\mu(A)^k} = \exp \left(-\mu(A) + \int_A f d\mu \right) \\ &= \exp \left(\int_A (f - 1) d\mu \right) = \exp \left(\int_Z (f - 1) d\mu \right) = \exp \left(- \int_Z (1 - f) d\mu \right). \end{aligned}$$

Der Rest ist Standardprozedur: $A \nearrow Z$ und der Satz von der monotonen Konvergenz. \square

Fakt

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int f d\mu \right) \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \eta} e^{-f(z)} \right] = \exp \left(- \int_Z (1 - e^{-f}) d\mu \right).$$

2 Stochastische Integrale

Definition Es sei $f \in L^1(\mu^n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ symmetrisch. Dann ist

$$I_0(f) := f$$

und

$$I_n(f) := \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \sum_{(z_1, \dots, z_n) \in \eta_{\neq}^i} \int_{Z^{n-i}} f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n) d\mu^{n-i}(z_{i+1}, \dots, z_n)$$

für $n \in \mathbb{N}$

Beispiel $I_1(f) = \sum_{z \in \eta} f(z) - \int_Z f d\mu.$

Bemerkung Ist $f \in L^1 \cap L^2$, so ist $I_n(f)$ das n -fache Wiener-Itô Integral bezüglich η (kompensiert).

Fakt $\mathbb{E}[I_n(f)] = 0.$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_n(f)] &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathbb{E} \left[\sum_{(z_1, \dots, z_i) \in \eta_{\neq}^i} \int_{Z^{n-i}} f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n) d\mu^{n-i}(z_{i+1}, \dots, z_n) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \int_{Z^i} \int_{Z^{n-i}} f(z_1, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n) d\mu^{n-i}(z_{i+1}, \dots, z_n) d\mu^i(z_1, \dots, z_i) \\ &= \underbrace{\int_{Z^n} f(z_1, \dots, z_n) d\mu^n(z_1, \dots, z_n)}_{< \infty, \text{ da } L^1} \underbrace{\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i}}_{(1-1)^n=0} = 0. \end{aligned}$$

□

Fakt $\mathbb{E}[I_n(f)I_m(g)] = n! \langle f, g \rangle_n \mathbf{1}(n = m)$, für $f \in L^1(\mu^n)$ und $g \in L^1(\mu^m)$ symmetrisch.

Ausblick $F(\eta) = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n)$

Beispiel $n = 2$:

$$I_2(f) = \int_Z^2 f(z_1, z_2) \mu^2(d(z_1, z_2)) - 2 \sum_{z_1 \in \eta} \int_Z f(z_1, z_2) \mu(dz_2) + \sum_{(z_1, z_2) \in \eta_z^2} f(z_1, z_2)$$

3 Chaosdarstellung

Es sei $F : N(Z) \rightarrow \mathbb{R}$

Definition Für $z \in Z$ definiere den *Differenzenoperator*

$$D_z F(\eta) := F(\eta + \delta_z) - F(\eta).$$

Für $z_1, \dots, z_n \in Z$ definiere Analog

$$D_{z_1, \dots, z_n} F(\eta) := D_{z_2, \dots, z_n} (D_{z_1} F(\eta)) = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|J|} F\left(\eta + \sum_{j \in J} \delta_{z_j}\right).$$

Es sei weiter

$$T_n F(z_1, \dots, z_n) := \mathbb{E} [D_{z_1, \dots, z_n} F(\eta)],$$

wobei $T_0 F = F$ gelte.

Es sei nun $A \in \mathcal{Z}$ mit $\mu(A) < \infty$. Setze $F(\eta) := \exp\left(-\int v d\eta\right)$ für eine beschränkte und messbare Funktion $v : Z \rightarrow \mathbb{R}$ mit $v \equiv 0$ auf A^c . Dann gilt

$$\begin{aligned} D_z F(\eta) &= F(\eta + \delta_z) - F(\eta) = \exp\left(-\int v d(\eta + \delta_z)\right) - \exp\left(-\int v d\eta\right) \\ &= \exp\left(-\int v d\eta - v(z)\right) - \exp\left(-\int v d\eta\right) = \exp\left(-\int v d\eta\right) (e^{-v(z)} - 1) \\ &\vdots \\ D_{z_1, \dots, z_n} F(\eta) &= \exp\left(-\int v d\eta\right) \left(\prod_{i=1}^n (e^{-v(z_i)} - 1)\right). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\mathbb{E} [D_{z_1, \dots, z_n} F(\eta)] = T_n F(z_1, \dots, z_n) = \exp\left(-\int (1 - e^{-v}) d\mu\right) \underbrace{\prod_{i=1}^n (e^{-v(z_i)} - 1)}_{=:(e^{-v}-1)^{\otimes n}}$$

Betrachte nun $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(T_n F)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(T_n F) &= I_0(T_0 F) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(T_n F) \\ &= \exp\left(-\int (1 - e^{-v}) d\mu\right) \\ &\quad + \exp\left(-\int (1 - e^{-v}) d\mu\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n\left((e^{-v} - 1)^{\otimes n}\right) \end{aligned} \quad (*)$$

Betrachte zunächst $I_n\left((e^{-v} - 1)^{\otimes n}\right)$:

$$\begin{aligned} I_n\left((e^{-v} - 1)^{\otimes n}\right) &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \sum_{(z_1, \dots, z_i) \in \eta_{\neq}^i} \int_{Z^{n-i}} \prod_{l=1}^n (e^{-v(z_l)} - 1) d\mu^{n-i}(z_{i+1}, \dots, z_n) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{(z_1, \dots, z_i) \in \eta_{\neq}^i} \prod_{l=1}^i (e^{-v(z_l)} - 1) \int_{Z^{n-i}} \prod_{l=i+1}^n (e^{-v(z_l)} - 1) d\mu^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sum_{(z_1, \dots, z_i) \in \eta_{\neq}^i} \prod_{l=1}^i (e^{-v(z_l)} - 1) \left(\int_Z 1 - e^{-v(z)} d\mu(z)\right)^{n-i}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (*) liefert nun

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(T_n F) &= \exp\left(-\int 1 - e^{-v} d\mu\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} \\ &\quad \cdot \sum_{\eta_{\neq}^i} \prod_{l=1}^i (e^{-v(z_l)} - 1) \left(\int_Z 1 - e^{-v(z)} d\mu(z)\right)^{n-i} \\ &= \exp\left(-\int 1 - e^{-v} d\mu\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{(z_1, \dots, z_i) \in \eta_{\neq}^i} \prod_{l=1}^i (e^{-v(z_l)} - 1) \\ &\quad \cdot \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{(n-i)!} \left(\int 1 - e^{-v} d\mu\right)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{\eta(A)} \frac{1}{i!} \sum_{(z_1, \dots, z_i) \in \eta_{\neq}^i} \prod_{l=1}^i (e^{-v(z_l)} - 1) = \sum_{J \subset \{1, \dots, \eta(A)\}} \prod_{j \in J} (e^{-v(z_j)} - 1) \\ &= \prod_{j=1}^{\eta(A)} e^{-v(z_j)} = \underbrace{\exp\left(-\int v d\mu\right)}_{=F} = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(T_n F) \end{aligned}$$

Fakt Ist F quadratintegrierbar, so gilt

$$F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(T_n F).$$

Fakt $\mathbb{V}(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n F\|_{L^2(\mu^n)}^2.$

Insbesondere folgt aus dieser Tatsache

$$\mathbb{V}(F) \geq \|T_1 F\|^2.$$

Fakt $\mathbb{V}(F) \leq \int_Z \mathbb{E}[D_z F]^2 \mu(dz).$

4 Malliavin-Operatoren

$$F = \sum_{n \geq 0}^{\infty} I_n(f_n)$$

- $z \in Z, D_z F = \sum_{n \geq 1} n I_{n-1}(f_n(z, \cdot))$
- $LF = - \sum_{n \geq 1} n I_n(f_n), L^{-1}F = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} I_n(f_n) \Rightarrow LL^{-1}F = L^{-1}LF = F$
- $h(z, \eta) = \sum_{n \geq 0} I_n(\underbrace{f_n(z_i)}_{n+1}), \delta(h) = \sum_{n \geq 0} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$

4.1 Pfadweise Interpretationen

- $D_z F(\eta) = F(\eta + \delta_z) - F(\eta)$
- $LF = \int_Z F(\eta - \delta_z) - F(\eta) \eta(dz) - \int_Z F(\eta + \delta_z) - F(\eta) \mu(dz)$
 Interpretation ($\mu < \infty$): L Generator eines Geburts-Todesprozesses auf Z
 - Punkte haben iid $\text{Exp}(1)$ Lebenszeiten
 - Punkte werden gemäß einer Poissonuhr mit Rate $\mu(Z)$ gemäß $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(Z)}$ geboren
 - Langzeitverhalten: PPP
- $\delta(h) = \int_Z h(\eta - \delta_z, z) \eta(dz) - \int_Z h(\eta, z) \mu(dz)$

Fakt $D(F \cdot G) = F \cdot DG + G \cdot DF + (DF) \cdot (DG)$.

Beweis: Es sei $z \in Z$:

$$\begin{aligned} D_z(F(\eta)G(\eta)) &= F(\eta + \delta_z)G(\eta + \delta_z) - F(\eta)G(\eta) \\ &= F(\eta + \delta_z)G(\eta + \delta_z) - F(\eta + \delta_z)G(\eta) + F(\eta + \delta_z)G(\eta) - F(\eta)G(\eta) \\ &= F(\eta + \delta_z)D_z G(\eta) + G(\eta)D_z F(\eta) \\ &= D_z F(\eta)D_z G(\eta) + G(\eta)D_z F(\eta) + F(\eta)D_z G(\eta). \end{aligned}$$

□

Fakt $\mathbb{E}[G\delta(h)] = \mathbb{E}\langle DG, h \rangle = \mathbb{E}\left[\int_Z D_z G(\eta) \cdot h(\eta, z) \mu(dz)\right]$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G\delta(h)] &= \mathbb{E}\left[G \int_Z h(\eta - \delta_z, z) \eta(dz)\right] - \mathbb{E}\left[G \int_Z h(\eta, z) \mu(dz)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[G(\eta + \delta_z) \int_Z h(\eta, z) \mu(dz)\right] - \mathbb{E}\left[G \int_Z h(\eta, z) \mu(dz)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[D_z G(\eta) \int_Z h(\eta, z) \mu(dz)\right].\end{aligned}$$

□

Fakt $\delta(DF) = -LF$.

Beweis:

$$D_z F(\eta) = F(\eta + \eta_z) - F(\eta)$$

und mit der Definition folgt die Behauptung.

Alternativ: $F = I_q$, dann gilt

$$D_z F = qI_{q-1}(f(z, \cdot))$$

und

$$\delta(DF) = qI_q(f),$$

also

$$-LF = -(-qI_q(f)) = \delta(DF).$$

□

5 Steinsche Methode

Definition Es sei \mathcal{H} eine Klasse von Funktionen und X, Y Zufallsvariablen, definiere

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) := \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(Y)]|.$$

Beispiele • $\mathcal{H} = \{1_B : B \text{ Borel}\} \Rightarrow d_{\mathcal{H}} = d_{\text{TV}}$

• $\mathcal{H} = \{1_{(-\infty, x]} : x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow d_{\mathcal{H}} = d_{\text{Kol}} = d_{\text{K}}$

• $\mathcal{H} = \{h : \text{Lip}(h) \leq 1\} \Rightarrow d_{\mathcal{H}} = d_{\text{W}}$

Fakt $N \sim N(0, 1) \Leftrightarrow \mathbb{E}[f'(N) - Nf(N)] = 0$, Stein-Gleichung: $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(N) < \infty$

$$h(x) - \mathbb{E}h(N) = f'(x) - xf(x).$$

Fakt $f_h(x) = e^{x^2/2} \int_{-\infty}^x (h(s) - \mathbb{E}[h(N)]) e^{-s^2/2} ds$. Ist h fast überall differenzierbar mit beschränkter Ableitung, so ist f_h zweimal differenzierbar und es gilt

$$\|f'_h\|_{\infty} \leq \|h'\|_{\infty}, \quad \|f''_h\|_{\infty} \leq 2\|h'\|_{\infty}.$$

Definiere nun

$$\mathcal{F}_W := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ zweimal differenzierbar, } \|f'\|_{\infty} \leq 1, \|f''\|_{\infty} \leq 2\},$$

dann folgt

$$\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(N)] = \mathbb{E}[f'_h(X) - Xf_h(X)]$$

und

$$d_W(X, N) \leq \sup_{f \in \mathcal{F}_W} |\mathbb{E}[f'(X) - Xf(X)]|.$$

6 Malliavin-Stein-Schranke

Es sei $\mathbb{E}[F] = 0$ und $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Ziel Schranke für $d_W(F, N)$.

Mittels Taylorentwicklung gilt

$$\begin{aligned} D_z f(F) &= f(F(\eta + \delta_z)) - f(F(\eta)) \\ &= f'(F(\eta))D_z F(\eta) + R(D_z F(\eta)) \end{aligned}$$

Da $\|f''\| \leq 2$, folgt $|R(y)| \leq \frac{y^2}{2} 2 = y^2$.

Mit $\mathbb{E}[G\delta(h)] = \mathbb{E}\langle DG, h \rangle$, $h = DL^{-1}F$, $G = f(F)$ und $\delta(DF) = -LF$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Ff(F)] &= \mathbb{E}[L(L^{-1}F)f(F)] = \mathbb{E}[-\delta(DL^{-1}F)f(F)] \\ &= -\mathbb{E}[G\delta(h)] = -\mathbb{E}\langle DG, h \rangle \\ &= -\mathbb{E}\langle Df(F), DL^{-1}F \rangle = \mathbb{E}\langle Df(F), -DL^{-1}F \rangle. \end{aligned}$$

Wegen

$$\mathbb{E}\langle Df(F), -DL^{-1}F \rangle = \mathbb{E}\langle f'(F)DF, -DL^{-1}F \rangle + \mathbb{E}\langle R(DF), -DL^{-1}F \rangle$$

folgt

$$\begin{aligned} &\sup_{f \in \mathcal{F}_W} |\mathbb{E}[f'(F) - Ff(F)]| \\ &= \sup_{f \in \mathcal{F}_W} |\mathbb{E}[f'(F) - f'(F)\langle DF, -DL^{-1}F \rangle + \langle R(DF), -DL^{-1}F \rangle]| \\ &\leq \sup_{f \in \mathcal{F}_W} \|f'\|_\infty \mathbb{E}[|1 - \langle DF, -DL^{-1}F \rangle|] + |\mathbb{E}\langle (DF)^2, -DL^{-1}F \rangle| \\ &\leq \mathbb{E}[|1 - \langle DF, -DL^{-1}F \rangle|] + \mathbb{E}\left[\int_Z (D_z F)^2 |D_z L^{-1}F| \mu(dz)\right]. \end{aligned}$$

Satz [3]

$$d_W(F, N) \leq \mathbb{E}[|1 - \langle DF, -DL^{-1}F \rangle|] + \mathbb{E}\left[\int_Z |D_z F|^2 |D_z L^{-1}F| \mu(dz)\right].$$

Es sei nun $1 = \mathbb{V}(N)$, dann gilt

$$\mathbb{E}\langle DF, -DL^{-1}F \rangle = \mathbb{E}\left[\int_Z (D_z F)(-D_z L^{-1}F) \mu(dz)\right]. \quad (*)$$

Mit

$$F = \sum_{n \geq 0} I_n(f_n)$$

folgen dann

$$D_z F = \sum_{n \geq 1} n I_{n-1}(f_n(z, \cdot)),$$

$$L^{-1} F = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} I_n(f_n)$$

und

$$-D_z L^{-1} F = \sum_{n \geq 1} I_{n-1}(f_n(z, \cdot)).$$

Einsetzen in (*) liefert dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \langle DF, -DL^{-1}F \rangle &= \mathbb{E} \left[\int_Z \left(\sum_{n \geq 1} n I_{n-1}(f_n(z, \cdot)) \right) \left(\sum_{n \geq 1} I_{n-1}(f_n(z, \cdot)) \right) \mu(dz) \right] \\ &= \int_Z \sum_{n \geq 1} n(n-1)! \|f_n(z, \cdot)\|_{L^2(\mu^{n-1})}^2 \mu(dz) \\ &= \sum_{n \geq 1} n! \|f_n\|_{L^2(\mu^n)}^2 = \mathbb{V}(F). \end{aligned}$$

Beispiel $F = I_1(f)$. $\rightarrow D_z F = f(z)$, $L^{-1} F = -I_1(f) = -F$ und $D_z L^{-1} F = -f(z)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle DF, -DL^{-1}F \rangle &= \langle f, f \rangle_{L^2(\mu)} = \|f\|_{L^2(\mu)}^2 \\ \Rightarrow d_W(F, N) &\leq |1 - \|f\|^2| + \int_Z |f(z)^3| \mu(dz) \end{aligned}$$

D.h.: $F_n = I_1(f_n)$ erfüllen einen CLT, falls $\|f_n\|_{L^2(\mu)}^2 \rightarrow 1$ und $\|f_n\|_{L^3(\mu)} \rightarrow 0$.

Beispiel $Z = \text{Geraden in der Ebene} = \mathcal{L}$ (siehe Abb. 2).

$$\int_{\mathcal{L}} g(E) d\mu_\lambda = \lambda \int_{\mathcal{L}_0} \int_{E_0^\perp} g(E_0 + x) dx dL$$

dabei sei η_λ ein PPP mit Intensitätsmaß μ_λ . Ist K eine Konvexe Menge, so gilt $F_\lambda(\eta) = l(\eta_\lambda \cap K)$, also

$$D_E F(\eta) = l(E \cap K), \quad D_{E_1, \dots, E_n} F \equiv 0 \quad \forall n \geq 2.$$

D.h. $F = \mathbb{E}[F] + I_1(f)$, $g(E) = l(E \cap K)$, also

$$\mathbb{E}[F] = \int_{[K]} l(E \cap K) \mu_\lambda(dE) = \lambda \cdot |K|$$

und

$$\mathbb{V}(F) = \mathbb{E}[F - \mathbb{E}[F]]^2 = \|f\|_{L^2(\mu_\lambda)}^2 = \lambda \int_{[K]} l(E \cap K)^2 \mu(dE).$$

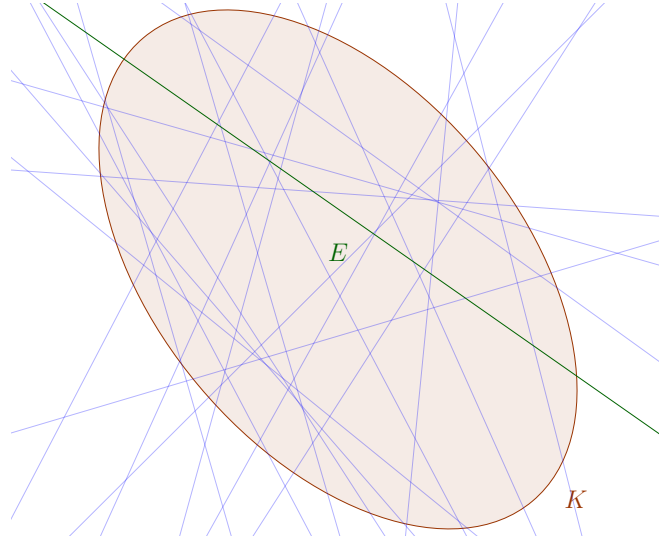


Abbildung 2: Zufällige Geraden in der Ebene

$$\mathbb{E}[F] = \lambda \int_{\mathcal{L}_0} \int_{E_0^\perp} l((E_0 + x) \cap K) dx dL$$

mit

$$\hat{F} = \frac{F - \mathbb{E}[F]}{\sqrt{\mathbb{V}(F)}} = I_1(\hat{f}), \quad \hat{f}(E) = \frac{f(E)}{\sqrt{\mathbb{V}(F)}}$$

gilt

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\mathbb{V}(F)} \|f\|_{L^2}^2 = 1$$

und

$$\|\hat{f}\|_{L^3}^3 = \frac{1}{\mathbb{V}(F)^{3/2}} \|f\|_{L^3}^3 = \frac{1}{\mathbb{V}(F)^{3/2}} \lambda \int_{[K]} l(E \cap K)^3 d\mu = c(K) \cdot \frac{\lambda}{\lambda^{3/2}} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Also folgt

$$D_{W/K}(\hat{F}, N) \leq c(K) \cdot \lambda^{-1/2}$$

und damit die Gültigkeit des CLT.

7 Geometrische Zufallsgraphen

Es sei η_t ein stationärer PPP mit Intensität $t > 1$ und $(\delta_t)_{t \geq 1}$ mit $\delta_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ und $t^2 \delta_t^d \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$. Definiere

$$\begin{aligned} F &:= \#\text{Kanten mit Mittelpunkt in } W \subset \mathbb{R}^d \\ &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in (\eta_t)^2_{\neq}} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right). \end{aligned}$$

Mit $u := x - y$ und $v := \frac{x+y}{2}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F] &= \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right) dx dy \\ &= \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1} (|u| \leq \delta_t, v \in W) du dv = \frac{t^2}{2} |W| d\kappa_d \delta_t^d \end{aligned}$$

Verwende nun die Darstellung $F = \mathbb{E}[F] + \sum_{n \geq 1} I_n(f_n)$, es gilt

$$\begin{aligned} f_1(x) = \mathbb{E}[D_x f] &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{(x_1, x_2) \in (\eta_t + \delta_x)^2_{\neq}} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\sum_{(x_1, x_2) \in \eta_t^2_{\neq}} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[2 \sum_{y \in \eta_t} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right) \right] \\ &= t \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right) dy \end{aligned}$$

und

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right),$$

sowie $f_n \equiv 0 \forall n \geq 3$. Also

$$F = \mathbb{E}[F] + I_1(f_1) + I_2(f_2).$$

Mit $u := x - y$ und $v := \frac{x+y}{2}$ ergibt sich für die Varianz

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(F) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right) t dx \right)^2 t dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1} \left(|x - y| \leq \delta_t, \frac{x + y}{2} \in W \right) t dx t dy \\ &= \frac{t^3}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1} (|u| \leq \delta_t, v \in W) du \right)^2 dv + \frac{t^2}{2} |W| d\kappa_d \delta_t^d \\ &= \frac{t^3}{2} |W| (d\kappa_d \delta_t^d)^2 + \frac{t^2}{2} |W| d\kappa_d \delta_t^d = \frac{|W| \kappa_d^2}{2} (t^3 \delta_t^{2d} + t^2 \delta_t^d)\end{aligned}$$

CLT gilt also, wenn

$$d_W \left(\frac{F - \mathbb{E}[F]}{\sqrt{\mathbb{V}(F)}}, N \right) \leq \delta_t^{d/2} \max(1, t^{-2} \delta_t^{-2d}).$$

Üblicherweise ist $\delta_t = O(t^{-1/d})$ und damit $\mathbb{E}[F] \approx t$ und $\mathbb{V}(F) \approx t$ und somit auch $d_W(\cdot, N) \leq t^{-1/2}$.

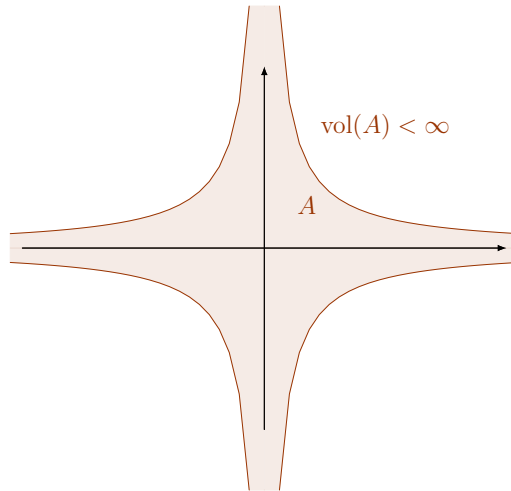


Abbildung 3: Eine Symmetrische Menge $A \subset \mathbb{R}^2$

Annäherungsdichten: k -dimensionale Ebenen im \mathbb{R}^d mit $k < d/2$.

$$\pi(\delta_t) = \frac{1}{2} \sum_{(E,F) \in \eta_{\neq}^2} \mathbf{1}(d(E,F) \leq \delta_t, m(E,F) \in W).$$

Konkret

- innere Volumina (additiv, translationsinvariant)

- Potenzen innerer Volumina (nicht additiv, nicht translationsinvariant)
- Integrale bezüglich Oberflächenmaßen
- $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex und $\mu = \lambda$, das Lebesgue-Maß und

$$H = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \eta_{\neq}^n} \mathbf{1}(x_1, \dots, x_n \text{ sind Ecken von } \text{conv}(x_1, \dots, x_n))$$

dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H] &= \lambda^n \int_{K^n} \mathbf{1}(\dots) dx_1 \dots dx_n \\ &= \lambda^n \mathbf{P}(x_1, \dots, x_n \text{ sind Ecken von } \text{conv}(x_1, \dots, x_n)) =: \lambda^n p. \end{aligned}$$

Also ist $\lambda^{-n}H$ ein Schätzer für p . Dieser ist erwartungstreu mit $\mathbb{V} = \dots$ und asymptotisch normal.

8 Das Boolsche Modell

Es bezeichne \mathcal{K}^d die konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^d und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}^d . Es sei nun η ein PPP im Raum der konvexen Mengen mit Intensitätsmaß μ gegeben durch

$$\mu(\cdot) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(K + x \in \cdot) dx Q(dK).$$

Es weiter

$$Z = \bigcup_{K \in \eta} K$$

und

$$F(\eta) = V_d(Z \cap W).$$

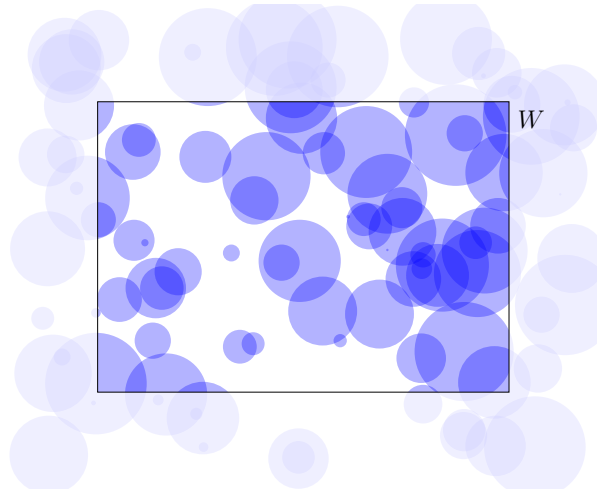


Abbildung 4: Boolesches Modell mit Beobachtungsfenster W

$$\begin{aligned} D_{K_1} F(\eta) &= F(\eta + \delta_{K_1}) - F(\eta) = V_d \left(\left[\left(\bigcup_{K \in \eta} K \right) \cup K_1 \right] \cap W \right) - V_d \left(\bigcup_{K \in \eta} K \cap W \right) \\ &= V_d((Z \cup K_1) \cap W) - V_d(Z \cap W) = V_d((Z \cap W) \cup (K_1 \cap W)) - V_d(Z \cap W) \\ &= V_d(Z \cap W) + V_d(K_1 \cap W) - V_d(Z \cap K_1 \cap W) - V_d(Z \cap W) \\ &= V_d(K_1 \cap W) - V_d(Z \cap K_1 \cap W). \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir dann

$$D_{K_1, \dots, K_n} F(\eta) = (-1)^n (V_d(Z \cap K_1 \cap \dots \cap K_n \cap W) - V_d(K_1 \cap \dots \cap K_n \cap W))$$

Satz [2]

$$\frac{F - \mathbb{E}[F]}{\sqrt{\mathbb{V}(F)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Für eine Folge $W \nearrow \mathbb{R}^d$ mit $r_{in}(W) \rightarrow \infty$, $\mathbb{E}[V_d(Z_0)^2] < \infty$, falls $\mathbb{E}[V_d(Z_0)^{3+\varepsilon}] < \infty$, so folgt $d_W(\cdot, N(0, 1)) \leq cr_{in}^{-d/2}$. Und dies ist optimal.

Erweiterung auf innere Volumina (Minkowski-Funktionale)

$$V_d(K) = \sum_{i=0}^d r^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(K)$$
$$V_i(K) = c(d, i) \int_{G(d, i)} V_i(K|L) \nu_i^d(DL)$$

Hadwiger $\varphi : K^d \rightarrow \mathbb{R}$ additiv, bewegungsinvariant, stetig oder monoton, dann gilt

$$\varphi = c_0 V_0 + \cdots + c_d V_d.$$

9 Voronoi Approximation

Es sei $K \subset \mathbb{R}^d$ konvex und η ein PPP mit Intensität λ . Für $z \in \eta$ definiere

$$V_z(\eta) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - z\| \leq \|y - z'\| \forall z' \in \eta \setminus \delta_z\}.$$

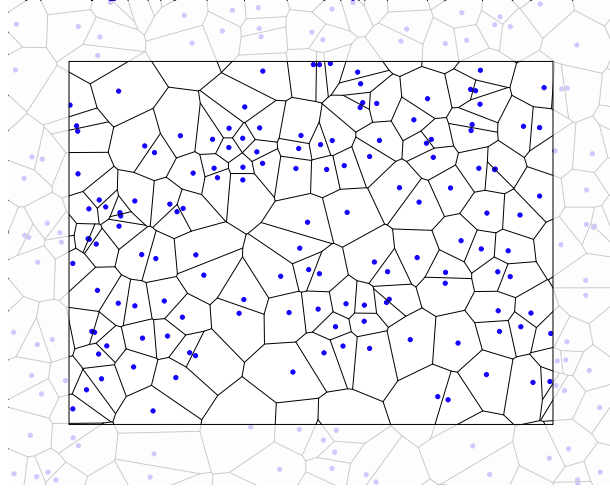


Abbildung 5: Ein zweidimensionales Voronoi-Mosaik

Dann heißt $(V_z(\eta))_{z \in \eta}$ *Voronoi-Mosaik*. Es sei weiter

$$A(K, \eta) = \bigcup_{z \in \eta \cap K} V_z(\eta)$$

und

$$F(\eta) V_d(A(K, \eta)),$$

dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F] &= \mathbb{E}[V_d(A(K, \eta))] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}(x \in A(K, \eta)) dx\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}\left[\sum_{z \in \eta \cap K} \mathbf{1}(x \in V_z(\eta))\right] dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_K \mathbf{P}(x \in V_y(\eta + \delta_y)) dy dx \end{aligned}$$

da $x \in V_y(\eta + \delta_y) \Leftrightarrow \eta \cap B^d(x, \|x - y\|) = \emptyset$, gilt

$$\mathbf{P}(x \in V_y(\eta + \delta_y)) = \mathbf{P}(B^d(x, \|x - y\|) \cap \eta = \emptyset)$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F] &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \int_K e^{-\lambda \kappa_d \|x-y\|^d} dy dx = \lambda d \kappa_d \int_K \int_0^\infty r^{d-1} e^{-\lambda \kappa_d r^d} dr dy \\ &= \lambda d \kappa_d V_d(K) \frac{1}{\lambda d \kappa_d} = V_d(K).\end{aligned}$$

Satz [1]

$$c_d S(K) \lambda^{-1-\frac{1}{d}} \leq \mathbb{V}(V_d(A(K, \eta))) \leq C_d S(K) \lambda^{-1-\frac{1}{d}}.$$

Satz [4] $(F - \mathbb{E}[F]) / \sqrt{\mathbb{V}(F)}$ erfüllt einen zentralen Grenzwertsatz.

Literatur

- [1] Matthias Heveling und Matthias Reitzner. „Poisson–Voronoi approximation“. In: *Annals of Applied Probability* **2** (19 2009), S. 719–736. DOI: [10.1214/08-AAP561](https://doi.org/10.1214/08-AAP561).
- [2] D. Hug, G. Last und M. Schulte. „Second order properties and central limit theorems for geometric functionals of Boolean models“. In: *ArXiv e-prints* (2013). arXiv:[1308.6519](https://arxiv.org/abs/1308.6519) [[math.PR](#)].
- [3] G. Peccati, J. L. Solé, M. S. Taqqu und F. Utzet. „Stein’s method and Normal approximation of Poisson functionals“. In: *Annals of Probability* **2** (38 2010), S. 443–478. DOI: [10.1214/09-AOP477](https://doi.org/10.1214/09-AOP477).
- [4] Matthias Schulte. „Normal approximation of Poisson functionals in Kolmogorov distance“. In: *ArXiv e-prints* (2012). arXiv:[1206.3967](https://arxiv.org/abs/1206.3967) [[math.PR](#)].